

## 1 Rayon de convergence

### Exercice 1 ★★ Vrai/Faux/Exemples –

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence  $\pi$ .
2. Est-il possible de trouver des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $a_n = o(b_n)$  et pourtant  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n b_n z^n$  ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1816]

### Exercice 2 ★ Rayon de convergence - 1 –

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
2.  $\sum_n \frac{n!}{(2n)!} x^n$
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} x^n$
4.  $\sum_n (\ln n) x^n$
5.  $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^{n+1}}$
6.  $\sum_n (2 + ni) z^n$
7.  $\sum_n \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} z^n$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1817]

### Exercice 3 ★★ Rayon de convergence - 2 –

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n \cdot 2^n}$
2.  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \sin \frac{1}{n} \right) x^n$
3.  $\sum_{n \geq 1} (\exp(1/n) - 1) x^n$
4.  $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n$ ,  $a > 0$
5.  $\sum_n z^{n!}$
6.  $\sum_{n \geq 1} n^{\ln n} z^n$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1818]

### Exercice 4 ★★★ Rayon de convergence sans règles –

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  dans les cas suivants :

1. la suite  $(a_n)$  tend vers  $\ell \neq 0$ ;
2. la suite  $(a_n)$  est périodique, et non identiquement nulle;
3.  $a_n$  est le nombre de diviseurs de  $n$ ;
4.  $a_n$  est la  $n$ -ième décimale de  $\sqrt{2}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1819]

### Exercice 5 ★ Rayon de convergence et suite récurrente linéaire –

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  où  $(a_n)$  est la suite déterminée par  $a_0 = \alpha$ ,  $a_1 = \beta$  et  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1820]

### Exercice 6 ★★ Division par $n!$ –

1. Soit  $\sum_n a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 0$ . Montrer que  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ .
2. On suppose maintenant que  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  a pour rayon de convergence  $\rho > 0$ . Que dire du rayon de convergence de  $\sum_n a_n x^n$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1821]

### Exercice 7 ★★ Puissance –

Soit  $\sum_n a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho \in [0, +\infty]$ , telle que  $a_n > 0$  pour tout entier  $n$  et soit  $\alpha > 0$ . Quel est le rayon de convergence de la série  $\sum_n a_n^\alpha x^n$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1822]

### Exercice 8 ★★★ Transformation –

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note  $R'$  le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$ .

1. Démontrer que  $R' \geq \max(1, R)$ .
2. Démontrer que  $R' = \max(1, R)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1826]

### Exercice 9 ★★★ Produit de Hadamard –

Soit  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence respectif  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série  $\sum_n a_n b_n z^n$  vérifie  $R \geq \rho_1 \rho_2$ . A-t-on toujours égalité ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1824]

### Exercice 10 ★★★ Comparaison de rayon de convergence –

Soit  $R$  le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^n$ . Comparer  $R$  avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

$$1. a_n e^{\sqrt{n}} z^n \quad 2. a_n z^{2n} \quad 3. a_n z^{n^2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1823]

### Exercice 11 ★★★ Somme partielle –

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho$ . Soit  $S_n = a_0 + \dots + a_n$  et soit  $R$  le rayon de convergence de la série  $\sum_n S_n z^n$ .

1. Montrer que  $R \leq \rho$ .
2. Montrer que  $\inf(1, \rho) \leq R$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1825]

## 2 Propriétés de la somme

### Exercice 12 ★ Fonction paire –

Soit  $S$  la somme de la série entière  $\sum_n a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ . Démontrer que  $S$  est paire si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2k+1} = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1912]

### Exercice 13 ★ Série entière qui s'annule autour de zéro –

Soit  $S$  une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $S(x) = 0$ . Justifier que  $S$  est identiquement nulle.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1827]

### Exercice 14 ★★★ L'anneau des séries entières est intègre –

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des séries entières (à coefficients complexes) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'addition et le produit de Cauchy de deux séries entières munissent  $\mathcal{A}$  d'une structure d'anneau. Montrer que  $\mathcal{A}$  est intègre.

**Exercice 15** ★★ Étude pratique de la somme d'une série entière –

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière définissant  $f$ .
2. Étudier la convergence en  $-R$  et en  $R$ .
3. Soit  $M > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 1$  et un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , alors

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 1^-$ .

4. Soit  $M > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 1$  et un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , alors

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

5. En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 1^-$ .
6. On considère la série entière

$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur  $[0, 1]$ . En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

7. On considère la série entière

$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur  $[0, 1]$ .

8. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1830]

**Exercice 16** ★★ Comportement au bord d'une série entière –

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de réels positifs. On note  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence respectifs des séries entières  $\sum_n a_n x^n$  et  $\sum_n b_n x^n$ . Soient  $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$  et  $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$ . On suppose enfin qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

1. Montrer que  $R \geq R'$ . On suppose désormais que  $R' = 1$  et que la série  $\sum_n b_n$  est divergente.
2. Soit  $M > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 0$  et un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , alors  $\sum_{n=0}^N b_n x^n \geq M$ .
3. En déduire que  $g(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .
4. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $N \geq 1$  tel que  $(l - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  pour tout  $n \geq N$ . Montrer que

$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où  $P$  est un polynôme, et  $(l - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

5. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Indication ▼ Correction ▼

[1829]

---

**Exercice 17** ★★★★★ **Limite en l'infini d'une série entière et développement en série –**

---

1. Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
2. Soit  $f$  la somme de la série entière  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$ . Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1833]

---

**Exercice 18** ★★★★★ **Théorèmes de Tauber -1 –**

---

Soit  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que  $S(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $1^-$  et on note  $\ell$  cette limite.

1. La série  $\sum_n a_n$  est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que la série  $\sum_n a_n$  converge et que  $\ell = \sum_{n \geq 0} a_n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1836]

---

**Exercice 19** ★★★★★ **Formule de Cauchy et applications –**

---

Soit  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et soit  $r \in ]0, R[$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $k$ , la série de fonctions  $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ .
2. En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

3. Application : on suppose que  $R = +\infty$  et que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $f$  est constante.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1834]

---

**Exercice 20** ★★★★★ **Théorème d'Abel –**

---

Soit  $(a_n)$  une suite de réels tel que  $\sum_n a_n x^n$  soit de rayon de convergence 1. On note  $f$  la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique  $\sum_n a_n$  converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1831]

---

**Exercice 21** ★★★★★★ **Théorème de Tauber - 2 –**

---

Soit  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que  $S(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $1^-$  et on note  $\ell$  cette limite. On suppose enfin que  $a_n = o(1/n)$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1[$ , on note

$$A(x) = S(x) - \ell, \quad B_N(x) = \sum_{n=0}^N (1-x^n) a_n, \quad C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que  $\sum_{n=0}^N a_n - \ell = A(x) + B_N(x) - C_N(x)$ .
2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Démontrer qu'il existe un entier  $N_0$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$ ,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série  $\sum_n a_n$  converge et que sa somme vaut  $\ell$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1837]

### 3 Développements en série entière

#### Exercice 22 ★ DSE en 0 –

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

- |                              |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\ln(1 + 2x^2)$           | 2. $\frac{1}{a - x}$ avec $a \neq 0$ |
| 3. $\ln(a + x)$ avec $a > 0$ | 4. $\frac{1}{e^x}$                   |
| 5. $\ln(1 + x - 2x^2)$       | 6. $(4 + x^2)^{-3/2}$                |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1838]

#### Exercice 23 ★★ Développement en série entière d'une racine carrée –

Déterminer le développement en série entière de  $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1839]

#### Exercice 24 ★★ DSE d'une fraction rationnelle –

Développer en série entière la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$  et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1840]

#### Exercice 25 ★★ Rayon de convergence et somme - 1 –

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$               | 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$ |
| 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$ |  |  |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1841]

#### Exercice 26 ★★★ Rayon de convergence et somme - 2 –

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$   | 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ | 3. $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ |
| 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ |   |  |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1852]

#### Exercice 27 ★★ –

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et on s'intéresse à la série entière  $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ . On note  $R$  son rayon de convergence.

1. Démontrer que  $R = 1$ .
2. On pose, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $F(x) = \sum_{n \geq 1} S_n x^n$ . Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .
3. En déduire la valeur de  $F(x)$  sur  $] -1, 1[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1842]

### Exercice 28 ★★ Méthode de l'équation différentielle –

Soit  $f$  l'application définie sur  $] -1, 1[$  par  $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par  $f$ .
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .
3. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , et donner son développement.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1843]

### Exercice 29 ★★ Méthode de l'équation différentielle –

Soit  $f$  l'application définie sur  $] -1, 1[$  par  $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par  $f$ .
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = \lambda$ .
3. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1844]

### Exercice 30 ★★ Par équation différentielle –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .
2. Justifier que  $f$  est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par  $f$ , déterminer ce développement.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1845]

### Exercice 31 ★★★ Fonction définie par une intégrale –

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer l'intégrale de Wallis  $I_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n} x dx$  à l'aide de la formule  $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ .
2. Justifier que, tout  $u \in ]-1, 1[$ , on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} u^n.$$

3. Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on pose

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}.$$

Démontrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et donner son développement.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1846]

### Exercice 32 ★★★★★ Intégration ou équation différentielle –

1. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , démontrer que  $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$ .
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

en procédant à une intégration terme à terme ; en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

3. en procédant à une intégration terme à terme ;

4. en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1847]

---

### Exercice 33 ★★★★★ Une fonction $C^\infty$ non développable en série entière –

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$ .

1. Justifier que  $f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que, pour chaque  $k \geq 1$ ,  $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$ .

3. En déduire que  $f$  n'est pas développable en série entière en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1848]

---

### Exercice 34 ★★★★★ Fonction définie par une série –

Pour  $x > -1$ , on pose  $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ . Démontrer que  $u$  est développable en série entière au voisinage de 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1849]

---

### Exercice 35 ★★ Une condition suffisante pour l'existence d'un développement en série entière –

Soit  $a > 0$  et  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle qu'il existe  $C, A > 0$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!$$

(on a noté  $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-a, a]} |g(x)|$ ). Démontrer que  $f$  est développable en série entière en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1851]

---

### Exercice 36 ★★★★★ Théorème de Bernstein –

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 telle que  $f$ , et toutes ses dérivées, sont positives sur  $I$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que  $[-\alpha, \alpha] \subset I$ . On veut prouver dans cet exercice que  $f$  est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle  $]-\alpha, \alpha[$ .

1. Justifier que, pour tout  $x \in [-\alpha, \alpha]$ ,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du.$$

On pose alors, pour tout  $x \in [-\alpha, \alpha]$ ,  $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du$ .

2. Démontrer que, si  $|x| < \alpha$ , alors  $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$ .

3. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1850]

---

### Exercice 37 ★★★★★ Inverse d'une fonction développable en série entière –

Soit  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que  $a_0 \neq 0$ . Le but est de prouver que la fonction  $1/f$  est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que  $1/f = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ , avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite  $(b_n)$  ?

2. Soit  $(b_n)$  la suite définie par la relation de récurrence précédente.

Justifier qu'il existe une constante  $R > 0$  telle que  $|a_n| \leq R^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Justifier qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|.$$

Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

Que peut-on en déduire sur la série  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ .

3. Justifier qu'il existe une constante  $R > 0$  telle que  $|a_n| \leq R^n$  pour tout  $n \geq 1$ .

4. Justifier qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|.$$

5. Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

6. Que peut-on en déduire sur la série  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ .

7. En déduire que  $1/f$  est développable en série entière.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1853]

## 4 Utilisation de développements en séries entières

### Exercice 38 ★★ Régularité –

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe  $C^\infty$  :

1.  $f(x) = \sin(x)/x$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ .
2.  $g(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$  si  $x \geq 0$  et  $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$  si  $x < 0$ .
3.  $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$  si  $x \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ ,  $h(0) = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1854]

### Exercice 39 ★ Comparaison de deux fonctions –

Prouver que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1855]

### Exercice 40 ★★ Calcul de la somme d'une série –

On considère la série entière  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$ .

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera  $R$ ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?

2. Sur quel intervalle la fonction  $f$  est-elle a priori continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur  $[-R, R]$ .

3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur  $] -R, R[$ . En déduire une expression de  $f$  sur  $] -R, R[$ .

4. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1856]

### Exercice 41 ★★★ Calcul de la somme d'une série –

On se propose dans cet exercice de calculer  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ . Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note  $j = e^{2i\pi/3}$ .



Calculer  $1 + j^k + j^{2k}$  pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ . En déduire le développement en série entière de  $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$ . En déduire  $S(x)$ , puis la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ .

2. Calculer  $1 + j^k + j^{2k}$  pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ . En déduire le développement en série entière de  $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$ .
3. En déduire  $S(x)$ , puis la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ .
4. Méthode 2.

Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par  $S$ . La résoudre. Retrouver la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ .

5. Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par  $S$ .
6. La résoudre.
7. Retrouver la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1858]

### Exercice 42 Une égalité intégrale/séries –

1. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ .
2. Démontrer que  $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1860]

### Exercice 43 Une suite récurrente –

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

1. On suppose que la série entière  $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$  a un rayon de convergence strictement positif  $r > 0$ . Démontrer que, pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on a  $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$ .
2. En déduire qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$  pour tout  $x \in ]-\rho, \rho[$ ,  $x \neq 0$ .
3. En développant en série entière la fonction précédente, calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1859]

### Exercice 44 Nombre de dérangements –

Pour tous les entiers  $k$  et  $n$  tels que  $n \geq 1$  et  $0 \leq k \leq n$ , on note  $D_{n,k}$  le nombre de bijections (ou permutations)  $s$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k$  points fixes, c'est-à-dire telles que

$$k = \text{card}\{i \in \{1, \dots, n\}; s(i) = i\}.$$

On pose  $D_{0,0} = 1$  et  $d_n = D_{n,0}$ .  $d_n$  désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de  $\{1, 2, 3\}$  et en déduire la valeur de  $D_{3,0}$ ,  $D_{3,1}$ ,  $D_{3,2}$  et  $D_{3,3}$ .
2. Montrer que  $n! = \sum_{k=0}^n D_{n,k}$ .
3. Montrer que  $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$ .
4. Montrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ . Montrer que  $(\exp x)f(x) = \frac{1}{1-x}$  pour  $|x| < 1$ .
6. En déduire que  $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .
7. Soit  $p_n$  la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1861]

### Exercice 45 Nombre d'involutions –

On rappelle qu'une involution de  $\{1, \dots, n\}$  est une application  $s: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $s \circ s(k) = k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . On note  $I_n$  le nombre d'involutions de  $\{1, \dots, n\}$  et on convient que  $I_0 = 1$ .

1. Démontrer que, si  $n \geq 1$ , alors

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

2. Démontrer que la série entière  $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$  converge pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ . On note  $S$  sa somme.

3. Justifier que, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $S'(x) = (1+x)S(x)$ .

4. En déduire une expression de  $S(x)$ , puis de  $I_n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1862]

## 5 Applications des séries entières à la résolution d'équations différentielles

### Exercice 46 ★★ Une équation différentielle détaillée –

On considère l'équation différentielle  $y'' + xy' + y = 1$ . On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant  $y(0) = y'(0) = 0$ .

1. Supposons qu'il existe une série entière  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite  $(a_n)$  ?

2. Calculer explicitement  $a_n$  pour chaque  $n$ . Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1863]

### Exercice 47 ★★ Avec des séries entières –

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0 \quad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$ .

1. Question préliminaire : soient  $a, b, c, d$  4 réels et  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} a \cos(x^2) + b \sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c \cos(x^2) + d \sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A quelle condition sur  $a, b, c, d$  la fonction  $f$  se prolonge-t-elle en une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ? On recherche les solutions de  $(E)$  qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par  $R$  son rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre  $a_{n+4}$  et  $a_n$ .

3. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p+1}$  et  $a_{4p+3}$ .

4. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p}$  en fonction de  $a_0$  et de  $p$  (respectivement  $a_{4p+2}$  en fonction de  $a_2$  et  $p$ ).

5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".

6. Soit  $S$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Préciser une base de  $S$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[247]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

On peut déterminer tous ces rayons de convergence en utilisant la règle de d'Alembert.

---

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

1. Utiliser la règle de d'Alembert (attention à l'exposant  $3n$ ).
  2. Utiliser un encadrement simple du terme général.
  3. Idem.
  4. Déterminer la limite de  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .
  5. Étudier directement la série.
  6. Utiliser la règle de Cauchy.
- 

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Dans tous les cas, on étudiera pour quelles valeurs de  $r \geq 0$  la suite  $(a_n r^n)$  est bornée. On pourra notamment encadrer la suite  $(a_n)$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Déterminer l'expression de  $a_n$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

1. Écrire

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} = |a_n| r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}$$

où  $r$  est tel que  $(a_n r^n)$  est bornée.

2. Il est nul !
- 

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

La suite  $(a_n^\alpha r^n)$  est bornée si et seulement la suite  $(a_n r^{n/\alpha})$  est bornée.

---

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

1. Majorer  $|b_n|$ .
  2. Exprimer  $|a_n|$  en fonction de  $|b_n|$  dans le cas où  $R' > 1$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Pour  $r < \rho_1 \rho_2$ , écrire  $a_n b_n r^n = a_n r_1^n b_n r_2^n$  où  $r_1$  et  $r_2$  sont bien choisis.

---

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. Écrire  $a_n = S_n - S_{n-1}$ .
  2. Écrire  $\sum_n S_n z^n$  comme le produit de Cauchy de  $\sum_n a_n z^n$  et d'une autre série.
- 

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

Utiliser le développement en série entière de  $S(-x)$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Exprimer les coefficients en terme de dérivée.

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

Montrer que si  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$ , il y a un coefficient non-nul dans le produit de Cauchy de  $fg$ .

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

1. Appliquer le critère de d'Alembert.
  2. En  $-1$ , utiliser le critère des séries alternées.
  3. Utiliser la divergence de  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ . La série majore toutes ces sommes partielles.
  4. Utiliser la divergence de  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ .
  5. La série majore toutes ces sommes partielles.
  6. Se ramener à la convergence simple en 1.
  7. Se ramener à la convergence simple en 1.
  - 8.
- 

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

1. Soit  $r > 0$ . Remarquer que  $|a_n r^n| \leq (l+1)|b_n r^n|$  pour tout  $n \geq n_0$ , et utiliser la définition du rayon de convergence.
  2. Soit  $M > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$  + continuité.
  3. Utiliser que  $g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n$ , et faire tendre  $x$  vers 1.
  4. Poser  $c_n = b_n$  si  $n \leq N$ ,  $c_n = a_n$  sinon.
  5.  $P(x)/g(x)$  tend vers 0 en 1.
- 

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

1. Elle est continue en 0, et comparer en  $+\infty$ .
  2. Développer la fonction apparaissant dans la question précédente en série entière, et intégrer.
- 

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

1. Trouver un contre-exemple avec une série alternée.
  2. Utiliser la croissance de  $S$  et des sommes partielles des séries.
- 

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

1.  $\sum_n |a_n| r^n$  converge.
  2. Développer  $f(re^{i\theta})$  en série entière et intervertir limite et intégrale.
  3. Pour  $k \geq 1$ , faire tendre  $r$  vers  $+\infty$  dans la formule précédente.
- 

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

1. Écrire  $a_k = R_{k-1} - R_k$ .
  2. Fixer d'abord  $n$  pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de  $x$  dans  $[0, 1[$ , puis faire tendre  $x$  vers 1...
- 

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

- 1.
  - 2.
  3. Choisir  $x = 1 - 1/N$  et majorer tous les termes.
-

---

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

1. Il suffit de remplacer  $t$  par  $2x^2$  dans le développement en série entière de  $\ln(1+t)$ .
  2. Factoriser par  $a$  au dénominateur.
  3. Factoriser par  $a$  dans le logarithme.
  4. C'est un simple produit de Cauchy.
  5. Factoriser  $1+x-2x^2$ .
  6. Se ramener à  $(1+t)^\alpha$ .
- 

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

Utiliser un produit. On pourra simplifier un peu l'expression pour éviter d'avoir à faire un produit de Cauchy trop compliqué...

---

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

Décomposer  $f$  en éléments simples. On trouve trois termes. Deux se ramènent immédiatement à  $1/(1+u)$  ou  $1/(1-u)$ . Pour le troisième, penser aux séries dérivées.

---

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

1. Écrire sous forme de deux sommes, et faire un changement d'indices dans la première somme.
  2. Écrire  $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ .
  3. Écrire  $(n+1)(n-2)$  sous la forme  $n(n-1)-2$ .
  4. Reconnaître la fonction exponentielle évaluée en un certain point.
- 

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

1. Reconnaître la dérivée de  $xS$ , où  $S$  est la somme de la série entière.
  2. Exprimer  $n^3$  en fonction de  $n(n-1)(n-2)$ ,  $n(n-1)$  et  $n$  pour se ramener à des séries dérivées.
  3. Partir de  $\frac{1}{1+x}$  qu'on dérivera.
  4. Utiliser la décomposition en éléments simples, puis utiliser le résultat de la première question.
- 

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

1. Encadrer  $S_n$  entre 1 et  $n$ .
  2. Développer et faire un changement d'indices dans une des deux sommes.
  3. Reconnaître un développement en série entière usuel.
- 

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

1. Dériver deux fois  $f$ , et combiner d'abord  $f$  et  $f''$  pour éliminer les termes en  $\cos(\alpha \arcsin t)$ , puis voir ce qu'il faut faire avec  $f'$ .
  2. Utiliser la méthode classique : on suppose qu'une solution existe a priori, on écrit le développement de cette solution, on remplace les coefficients, etc...
  3. Il y a unicité au problème de Cauchy.
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

1. Dériver deux fois  $f$ , et combiner...
  2. Utiliser la méthode classique : on suppose qu'une solution existe a priori, on écrit le développement de cette solution, on remplace les coefficients, etc...
  3. Il y a unicité au problème de Cauchy.
-

---

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

---

- 1.
  2. Produit et intégration.
  - 3.
- 

---

**Indication pour l'exercice 31 ▲**

---

1. Appliquer la formule du binôme de Newton.
  2. Utiliser le résultat du cours.
  3. Développer en série entière la fonction sous l'intégrale, puis permuter la somme et l'intégrale.
- 

---

**Indication pour l'exercice 32 ▲**

---

1. Procéder par intégrations par parties.
  2. Développer la fonction à l'intérieur de l'intégrale en série entière, puis utiliser le théorème de permutation limite/intégrale. Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour former l'équation différentielle, utiliser une intégration par parties.
  3. Développer la fonction à l'intérieur de l'intégrale en série entière, puis utiliser le théorème de permutation limite/intégrale.
  4. Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour former l'équation différentielle, utiliser une intégration par parties.
- 

---

**Indication pour l'exercice 33 ▲**

---

1. Montrer la convergence normale de toutes les séries dérivées.
  2. Majorer la somme par un terme, et utiliser  $k^k \geq k!$ .
  3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  est divergente.
- 

---

**Indication pour l'exercice 34 ▲**

---

On peut commencer par écrire  $\frac{1}{x+n}$  à l'aide d'une série en utilisant une série géométrique (si  $|x| < 1$ ) puis essayer de permuter les deux sommes. On peut aussi remarquer que  $\frac{1}{x+n} = \int_0^1 t^{x+n-1} dt$ , permuter la série et l'intégrale, puis développer en série entière  $t^x$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 35 ▲**

---

Utiliser une formule de Taylor.

---

---

**Indication pour l'exercice 36 ▲**

---

1. C'est du cours !
  2.  $f^{(n+1)}$  est croissante.
  3. Il suffit de démontrer que  $(R_n(\alpha))$  est une suite bornée. Pour cela, observer que dans la première question, tous les termes de la somme sont positifs.
- 

---

**Indication pour l'exercice 37 ▲**

---

1. Utiliser un produit de Cauchy.
  2. Procéder par récurrence.
  - 3.
  - 4.
  5. Procéder par récurrence.
  - 6.
  7. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  est égale à  $1/f$ .
-

---

**Indication pour l'exercice 38 ▲**

Pour les deux premières fonctions, on montrera qu'elles sont développables en série entière en utilisant les développements en séries entières usuels. Pour la troisième, on pourra la faire apparaître comme le quotient de deux fonctions  $C^\infty$ , en utilisant les séries entières.

---

**Indication pour l'exercice 39 ▲**

Développer les deux fonctions en série entière et prouver que  $2^k k! \leq (2k)!$ .

---

**Indication pour l'exercice 40 ▲**

1. Appliquer (par exemple) la règle de d'Alembert.
  2. Convergence normale.
  3. Comparer avec le développement en série entière de  $\ln(1+x)$ . Puis intégrer (par parties).
  4. Passer à la limite.
- 

**Indication pour l'exercice 41 ▲**

1. Raisonner modulo 3.
  2. Raisonner modulo 3.
  - 3.
  4.  $S^{(3)} = S$ . Comment résoud-on les équations différentielles à coefficients constants ? (il faut introduire l'équation caractéristique...) Utiliser les conditions initiales pour trouver  $S$ .
  5.  $S^{(3)} = S$ .
  6. Comment résoud-on les équations différentielles à coefficients constants ? (il faut introduire l'équation caractéristique...)
  7. Utiliser les conditions initiales pour trouver  $S$ .
- 

**Indication pour l'exercice 42 ▲**

1. Faire une intégration par parties.
  2. Développer en série entière  $\ln(1-x)$ , puis utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
- 

**Indication pour l'exercice 43 ▲**

1. Calculer  $f^2(x)$  en utilisant le produit de Cauchy et la formule de récurrence pour  $f$ . Former une équation du second degré vérifiée par  $f$ .
  2. Résoudre l'équation précédente. Pour enlever une possibilité, on pourra utiliser la continuité de  $f$  en 0.
  3. Les coefficients du développement en série entière de  $f$  vérifient la même relation de récurrence que la suite  $(u_n)$ .
- 

**Indication pour l'exercice 44 ▲**

1. Il y a 6 permutations....
  2. Regrouper les permutations suivant leur nombre de points fixes.
  3. Pour décrire une permutation ayant  $k$  points fixes, il faut choisir ces  $k$  points fixes, puis, pour les autres  $n-k$  points, décrire le dérangement que l'on obtient.
  4. Majorer (trivialement)  $d_n$ .
  5. Faire le produit de Cauchy des deux séries entières et utiliser les formules des deux premières questions.
  6. Exprimer  $f$  en fonction des autres.
  7. Étudier  $d_n/n!$ .
- 

**Indication pour l'exercice 45 ▲**

1. Séparer les involutions suivant qu'elles fixent  $n+1$  ou qu'elles ne fixent pas  $n+1$ .
2. Une involution est une bijection.

3. Utiliser le résultat de la première question.
  4. Résoudre l'équation différentielle.
- 

**Indication pour l'exercice 46 ▲**

---

1. Développer  $f'' + xf' + f$  en série entière et identifier les coefficients.
  2. Pour l'identification à une fonction classique, se rapprocher du développement en série entière de la fonction exponentielle.
- 

**Indication pour l'exercice 47 ▲**

---

1. Étudier les conditions qu'impose la continuité de  $f$ , de  $f'$  et de  $f''$  en 0 sur les coefficients  $a, b, c, d$ .
  2. Introduire cette solution dans l'équation différentielle, mettre tout sous la forme d'une seule somme et identifier.
  3. Que valent  $a_1$  et  $a_3$  ?
  - 4.
  - 5.
  6. Il faut raccorder les solutions en s'aidant de la question préliminaire !
-



### Correction de l'exercice 1 ▲

1. La série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}$  convient.
2. Si  $a_n = \frac{1}{n+1}$  et  $b_n = 1$ , les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant  $a_n = o(b_n)$ .
3. C'est le même ! on a  $|a_n \rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$  pour tout  $\rho \geq 0$ , et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. Posons  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow 1$$

et donc le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

2. Posons  $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4n+2} \rightarrow 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est  $+\infty$ .

3. On applique la règle de d'Alembert en remarquant que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \rightarrow \frac{1}{8},$$

où on a posé  $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$ . Le rayon de convergence de la série est donc égal à 8.

4. On sait que  $(\ln n R^n)$  est borné si et seulement si  $|R| < 1$ . Ainsi, le rayon de convergence vaut 1. Ceci peut se retrouver par la règle de d'Alembert, puisque

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \rightarrow 1.$$

5. Pour  $R > 0$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}R^{2n}}{2^n + 1} \sim_{+\infty} \sqrt{n} \left(\frac{R^2}{2}\right)^n.$$

Ceci est borné si et seulement si  $\frac{R^2}{2} < 1$ . Le rayon de convergence est donc  $\sqrt{2}$ . On peut là encore donner une preuve en utilisant la règle de d'Alembert.

6. On remarque que

$$(n-2)|z|^n \leq |2+ni||z^n| \leq (2+n)|z|^n.$$

Ainsi, la série converge pour  $|z| < 1$  et diverge pour  $|z| > 1$ . Son rayon de convergence est donc 1.

7. Notant  $u_n = \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} z^n$ , on applique la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de cette série. On a :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|}{2n+1} \rightarrow 0.$$

La série entière est donc convergente pour toute valeur de  $z$ . Son rayon de convergence est donc  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Avant de commencer, on pourra consulter la vidéo suivante :

On notera pour chaque exemple  $a_n x^n$  le terme général de la série.

1. Posons  $u_n = \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n \cdot 2^n}$ . Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, si  $|z|^3 < \sqrt{2}$ , la série de terme général  $|u_n|$  est convergente d'après le critère de d'Alembert, alors qu'elle est divergente si  $|z|^3 > \sqrt{2}$ . On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est  $\sqrt[3]{2}$ .

2. En effectuant un développement limité, on trouve que  $a_n \sim \frac{1}{n}$  d'où  $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$ . La suite  $(|a_n z^n|)$  est donc bornée si et seulement si  $|z| \leq 1$ . Le rayon de convergence de la série est 1.

3. On a  $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ , donc  $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$  et la suite  $(|a_n z^n|)$  est bornée si et seulement si  $|z| < 1$ . Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1.

4. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à  $u_n = a^{\sqrt{n}} |z|^n$ . On obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z| a^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Or,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left( (1 + 1/n)^{1/2} - 1 \right) = \sqrt{n} \left( 1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \rightarrow 0.$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow |z| a^0 = |z|.$$

On en déduit que la série des modules converge absolument pour  $|z| < 1$  et diverge pour  $|z| > 1$ . Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

5. Pour  $|z| < 1$ , on remarque que  $|z|^{n!} \leq |z|^n$  et donc la série est convergente. Pour  $|z| \geq 1$ , le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.

6. Pour  $u_n = n^{\ln n} |z|^n$ , on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n / n} |z| = \exp((\ln n \times \ln n) / n) |z| \rightarrow |z|.$$

La série est donc convergente pour  $|z| < 1$  et divergente pour  $|z| > 1$ . Son rayon de convergence vaut 1.

#### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Puisque la suite  $(a_n)$  est convergente, elle est bornée et donc la suite  $(a_n 1^n)$  est bornée. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1. De plus, au voisinage de l'infini, on a  $a_n r^n \sim \ell r^n$ . Si  $r > 1$ , ceci tend vers  $\pm\infty$ , suivant le signe de  $\ell$ . Le rayon de convergence de la série entière est donc exactement égal à 1.

2. Puisque la suite  $(a_n)$  est périodique, elle est bornée et un raisonnement identique à celui de la question précédente donne que le rayon de convergence est au moins égal à 1. De plus, puisque la suite  $(a_n)$  est périodique et non identiquement nulle, elle ne converge pas vers 0. Ainsi, la série  $\sum_n a_n 1^n$  est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1.

3. Il suffit de remarquer que  $1 \leq a_n \leq n$ , ce qui entraîne

$$|x|^n \leq |a_n x^n| \leq n |x|^n.$$

Ainsi, pour  $|x| < 1$ , la série  $\sum_n a_n x^n$  converge, et pour  $|x| > 1$ , elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.

4. La suite  $(a_n)$  est une suite qui prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, 9\}$  donc elle est bornée. Puisque  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre décimal,  $(a_n)$  prend une infinité de fois une valeur dans  $\{1, \dots, 9\}$ . En particulier,  $(a_n)$  ne tend pas vers 0. Raisonnant comme ci-dessus, on trouve que le rayon de convergence vaut exactement 1.

#### Correction de l'exercice 5 ▲

C'est plus un exercice de révision sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 que sur les séries entières. On peut en effet déterminer l'expression de  $a_n$ , en introduisant l'équation caractéristique  $r^2 = 2r - 1$ , donc 1 est racine double. Il existe donc  $\lambda, \mu$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_n = \lambda + \mu n$$

Utilisant la valeur de  $a_0$  et  $a_1$ , on obtient alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot n.$$

Ainsi, si  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , le rayon de convergence vaut 1. Sinon, il vaut  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit  $0 < r < \rho$ . Par la définition du rayon de convergence, on sait que la suite  $(a_n r^n)_n$  est bornée. Autrement dit, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$|a_n r^n| \leq M.$$

Soit maintenant  $R > 0$ . Alors on a

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} = |a_n| r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}.$$

Par croissance comparée des suites puissances et factorielle, il existe  $C > 0$  tel que  $|(R/r)^n|/n! \leq C$ . Il vient, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} \leq MC.$$

La suite  $(a_n R^n/n!)$  est bornée pour tout  $R > 0$ , donc le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  vaut  $+\infty$ .

2. D'après la première question, si  $\sum_n a_n r^n$  converge pour un certain réel  $r$ , donc dès que le rayon de convergence de  $\sum_n a_n x^n$  est strictement positif (il peut être éventuellement égal à  $+\infty$ ), alors le rayon de convergence de  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  est égal à  $+\infty$ . Par contraposée, si on suppose que  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  a un rayon de convergence  $\rho \in [0, +\infty[$ , alors  $\sum_n a_n x^n$  a un rayon de convergence nul.

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Il suffit de remarquer que la suite  $(a_n r^n)$  est bornée si et seulement la suite  $(a_n r^{n/\alpha})$  (obtenue en prenant la puissance  $1/\alpha$  de la première) est bornée. Ainsi, si  $r < \rho^\alpha$ , alors  $r^{1/\alpha} < \rho$  et donc les suites  $(a_n r^{n/\alpha})$  et  $(a_n^\alpha r^n)$  sont bornées. De même, si  $r > \rho^\alpha$ , de sorte que  $r^{1/\alpha} > \rho$ , alors les suites  $(a_n r^{n/\alpha})$  et  $(a_n^\alpha r^n)$  ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série  $\sum_n a_n^\alpha x^n$  est égal à  $\rho^\alpha$ .

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. On a d'une part  $|b_n| \leq 1$  et d'autre part  $|b_n| \leq |a_n|$ . Ces deux inégalités montrent que  $R' \geq \max(1, R)$ .

2. Si  $R' = 1$ , alors  $R \leq 1$  et on a bien  $R' = \max(1, R)$ . Supposons maintenant que  $R' > 1$  et prouvons que  $R' = R$ , ou encore que  $R \geq R'$ . Pour cela, on remarque que, puisque  $R' > 1$ , la série  $\sum_n b_n$  est convergente et donc  $(b_n)$  converge vers 0. On peut alors exprimer  $|a_n|$  en fonction de  $|b_n|$  en écrivant

$$|a_n| = \frac{|b_n|}{1 - |b_n|}.$$

Ainsi, si la suite  $(b_n r^n)$  est bornée, il en est de même de la suite  $(a_n r^n)$  et donc  $R \geq R'$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

Soit  $0 \leq r < \rho_1 \rho_2$ . Alors il existe  $r_1 < \rho_1$  et  $r_2 < \rho_2$  tel que  $r = r_1 r_2$ . Les suites  $(a_n r_1^n)$  et  $(b_n r_2^n)$  sont bornées. Il en est de même de la suite  $(a_n b_n r_1^n r_2^n)$ , c'est-à-dire de la suite  $(a_n b_n r^n)$ . Comme ceci est vrai pour tout  $r < \rho_1 \rho_2$ , le rayon de convergence recherché est au moins égal à  $\rho_1 \rho_2$ . On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est  $\sum_n z^{2n}$  et la deuxième série est  $\sum_n z^{2n+1}$ , alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à  $+\infty$ , alors que dans ce cas  $\rho_1 \rho_2 = 1 \times 1 = 1$ .

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Notons  $R_1$  le rayon de convergence de  $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ . Puisque  $|a_n| e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$ , on a  $R_1 \leq R$ . Soit maintenant  $r > 0$  tel que  $(a_n r^n)$  soit bornée. Alors, pour tout  $\rho \in [0, r[$ , on a

$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$

et comme  $e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , car  $\ln(\rho/r) < 0$ , la suite  $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$  est bornée. On en déduit que  $R \leq R_1$  et donc finalement que  $R = R_1$ .

2. Il est clair que  $(a_n r^{2n})$  est bornée si et seulement si  $(a_n (r^2)^n)$  est bornée (c'est la même suite écrite de deux façons différentes). Le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{2n}$  est donc égal à  $\sqrt{R}$ .

3. Supposons d'abord  $R > 0$  et  $R < +\infty$ . On va alors prouver que le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est égal à 1. En effet, soit  $r$  tel que  $(a_n r^n)$  est bornée. Alors, pour tout  $\rho < 1$ , on a  $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  et cette quantité est bornée car  $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  tend vers 0 (on a choisi  $\rho < 1$ ). Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est supérieur ou égal à 1. De façon similaire, on prouve que, si  $r$  est tel que  $a_n r^n$  n'est pas bornée, alors pour tout  $\rho > 1$ , on a  $a_n \rho^{n^2}$  qui n'est pas borné. Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est égal à 1. Lorsque  $R = +\infty$ , alors le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  sera élément de  $[1, +\infty]$ , mais toutes les valeurs peuvent être prises :

Si  $a_n = 1/n!$ , alors le rayon vaut 1. Si  $a_n = 1/n^{n^2}$ , alors le rayon vaut  $+\infty$ . Si  $a_n = 1/\lambda^{n^2}$ , avec  $\lambda > 1$ , le rayon de convergence vaut  $\lambda$ .

De même, si  $R = 0$ , alors le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  peut être n'importe quel réel dans  $[0, 1]$ .

4. Si  $a_n = 1/n!$ , alors le rayon vaut 1.

5. Si  $a_n = 1/n^{n^2}$ , alors le rayon vaut  $+\infty$ .

6. Si  $a_n = 1/\lambda^{n^2}$ , avec  $\lambda > 1$ , le rayon de convergence vaut  $\lambda$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Remarquons que  $a_n = S_n - S_{n-1}$  et donc que  $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$ . Ainsi,  $\sum_n a_n z^n$  est la différence de deux séries entières de rayon de convergence  $R$ , son rayon de convergence  $\rho$  vérifie  $\rho \geq R$ .

2. La série  $\sum_n S_n z^n$  est le produit de Cauchy des deux séries entières  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n z^n$ . Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif  $\rho$  et 1. On en déduit que le rayon de convergence  $R$  de la série  $\sum_n S_n z^n$  vérifie  $R \geq \inf(1, \rho)$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

Supposons d'abord que  $a_{2k+1} = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $S$  est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que  $S$  est paire, et posons  $T(x) = S(-x)$ . Alors, on sait que, pour tout  $x \in ]-R, R[$ , on a

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque  $S$  est paire,  $T$  et  $S$  coïncident sur  $] -R, R[$ . C'est donc que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_n = (-1)^n a_n$ . Ceci impose que  $a_n = 0$  dès que  $n$  est impair.

### Correction de l'exercice 13 ▲

Notons  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Alors on sait que  $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ . Mais,  $S$  est identiquement nulle sur l'intervalle  $] -\alpha, \alpha[$ . Il en est de même de toutes ses dérivées et en particulier on a  $S^{(n)}(0) = 0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi,  $S$  est identiquement nulle.

### Correction de l'exercice 14 ▲

Soit  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  et  $g(z) = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1, non identiquement nulles. Soit  $a_p$  le premier coefficient non-nul de  $f$  et soit  $b_q$  le premier coefficient non-nul de  $g$ . Alors  $f g$  est la série entière  $\sum_n c_n z^n$ , où  $c_n$  est donné par

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Maintenant, étudions le coefficient  $c_{p+q}$ . On a

$$c_{p+q} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k}.$$

Mais la première somme est nulle, puisque  $a_k = 0$  pour  $k \leq p-1$ , et la dernière somme est nulle puisque  $b_{p+q-k} = 0$  pour  $k \geq p+1$ . Ainsi,  $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$  et  $fg$  n'est pas la série entière identiquement nulle. L'anneau étudié est bien intègre.

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. Puisque  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.

2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et  $\pi/2$ , la suite  $(\sin(1/\sqrt{n}))$  est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en  $-1$ . En 1, la série  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$  est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente  $\sum_n 1/\sqrt{n}$  (on compare bien des séries à termes positifs).

3. La série  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ , qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M+1.$$

De plus, cet entier  $N$  étant fixé, la fonction  $h : x \mapsto \sum_{n=1}^N \sin(1/\sqrt{n})x^n$  est continue en 1. Ceci donne l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1-\delta, 1]$ ,

$$h(x) \geq h(1) - 1.$$

Ceci est exactement le résultat voulu. Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout  $M > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1-\delta, 1]$ ,

$$f(x) \geq M.$$

Ceci signifie exactement que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $1^-$ .

4. La série  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ , qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M+1.$$

De plus, cet entier  $N$  étant fixé, la fonction  $h : x \mapsto \sum_{n=1}^N \sin(1/\sqrt{n})x^n$  est continue en 1. Ceci donne l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1-\delta, 1]$ ,

$$h(x) \geq h(1) - 1.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

5. Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout  $M > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1-\delta, 1]$ ,

$$f(x) \geq M.$$

Ceci signifie exactement que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $1^-$ .

6. Il est clair que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\left| \left( \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right|.$$

D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \leq \frac{C}{(n-1)^{3/2}}$$

(la dernière inégalité pouvant se démontrant en appliquant aussi l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ). La série (numérique) de terme général  $(n-1)^{-3/2}$  étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant  $g$  sur  $[0, 1]$ . Un calcul aisé montre que

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + g(x).$$

Or,  $g$  étant continue en 1, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = \sin(1) + g(1) = \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] = 0.$$

7. Il est clair que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\left| \left( \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right|.$$

D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \leq \frac{C}{(n-1)^{3/2}}$$

(la dernière inégalité pouvant se démontrant en appliquant aussi l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ). La série (numérique) de terme général  $(n-1)^{-3/2}$  étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant  $g$  sur  $[0, 1]$ .

8. Un calcul aisé montre que

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + g(x).$$

Or,  $g$  étant continue en 1, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = \sin(1) + g(1) = \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] = 0.$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$|a_n| \leq (l+1)|b_n|.$$

Soit maintenant  $r > 0$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$|a_n|r^n \leq (l+1)|b_n|r^n$$

et donc, si la suite  $(|b_n|r^n)$  est bornée, la suite  $(|a_n|r^n)$  l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de  $\sum_n a_n x^n$  étant en effet donné par

$$R = \sup\{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ est bornée} \}.$$

2. Fixons  $N \geq 1$  tel que  $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$ . Posons ensuite  $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$ . On a  $P(1) = 2M > M$ . Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de  $P$  en 1.

3. Soit  $M > 0$  et soient  $N, \delta$  donnés par la question précédente. Alors, puisque  $b_n$  est positif pour tout  $n$ , on a, pour chaque  $x \in ]0, 1[$ ,

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

En particulier, pour tout  $x \in ]1-\delta, 1[$ , on a

$$g(x) \geq M.$$

Ceci prouve bien que  $g$  tend vers  $+\infty$  en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^N (a_n - l b_n) x^n + \sum_{n=0}^N l b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé  $P(x) = \sum_{n=0}^N (a_n - lb_n)x^n$  et  $c_n = lb_n$  si  $n \leq N$ ,  $c_n = a_n$  sinon.

5. On fixe  $\varepsilon > 0$  et on décompose  $f$  comme précédemment. D'une part, on a  $(l - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  et donc, multipliant par  $x^n$  et sommant pour  $n = 0, \dots, +\infty$ , on déduit que

$$(l - \varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l + \varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque  $P$  est un polynôme, donc est continu en 1, et que  $g(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 1$ , on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 1.$$

On en déduit l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que  $f/g$  tend vers  $l$  en 1.

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} \sim_0 \frac{t^4}{t^2} = t^2$$

et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de  $+\infty$ , la fonction est équivalente à  $\frac{1}{t^2}$  qui est intégrable car  $2 > 1$ . La fonction est donc intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

2. La fonction  $t \mapsto \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2}$  est développable en série entière en 0, de rayon de convergence  $+\infty$ , et on a pour tout  $t \neq 0$

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}.$$

Par intégration de cette série entière, on trouve

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} dt = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt.$$

Ainsi,  $f$  admet une limite en  $+\infty$  égale à  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt$ .

### Correction de l'exercice 18 ▲

1. Pour  $a_n = (-1)^n$ , on a  $S(x) = \frac{1}{1+x}$  qui tend vers  $1/2$  si  $x$  tend vers  $1^-$ , alors que la série  $\sum_n a_n$  diverge.

2. Remarquons d'abord que  $S$  est croissante (puisque chaque  $x \mapsto a_n x^n$  est croissante). Ainsi, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $S(x) \leq \ell$ . Mais alors, pour chaque  $N \in \mathbb{N}$ , on a encore

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq \ell.$$

Si on fait tendre  $x$  vers  $1^-$ , on obtient que

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq \ell.$$

Les sommes partielles de la série  $\sum_n a_n$ , qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$ . Fixons ensuite  $\varepsilon > 0$  et  $x \in [0, 1[$  tel que  $S(x) \geq \ell - \varepsilon$ . Il vient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \ell - \varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. Puisque  $r < R$ , il résulte du lemme d'Abel que la série  $\sum_n |a_n| r^n$  est convergente. Puisque  $|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n| r^n$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on en déduit la convergence normale de la série demandée sur  $[0, 2\pi]$ .

2. On a

$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$

Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur  $[0, 2\pi]$ , on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = \sum_n a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

La dernière intégrale est égale à 0 si  $k \neq n$ , et à  $2\pi$  sinon. On en conclut que

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi a_k r^k.$$

3. Pour  $k \geq 1$ , on a

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta.$$

Soit  $M > 0$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Alors on a

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$

Faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$ , on trouve  $a_k = 0$  pour  $k \geq 1$ , ce qui entraîne que  $f$  est constante.

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. On commence par couper la somme en  $n$  et par remarquer que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme  $a_k = R_{k-1} - R_k$  (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour  $m \geq n+1$ , il vient

$$\sum_{k=n+1}^m a_k x^k = \sum_{k=n+1}^m (R_{k-1} - R_k) x^k = \sum_{k=n+1}^{m-1} R_k (x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_m x^m.$$

Puisque  $(R_p)$  tend vers 0, on peut faire tendre  $m$  vers  $\infty$  et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n x^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1).$$



2. On va d'abord fixer  $n$  pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de  $x$  dans  $[0, 1[$ , puis on va faire tendre  $x$  vers 1. Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $k \geq n$ , on a  $|R_k| \leq \varepsilon$ . On en déduit, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\left| (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k \right| \leq \varepsilon |x-1| \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de  $n$ ,

$$|R_n(x^{n+1} - 1)| \leq 2\varepsilon.$$

Cette valeur de  $n$  étant fixée, la fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1)$  est continue en 1, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1) \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

---

### Correction de l'exercice 21 ▲

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.

2. Soit  $N_0$  tel que, pour tout  $n \geq N_0$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon/n$ . Pour  $N \geq N_0$ , il vient

$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir  $x = 1 - \frac{1}{N}$ , de sorte à avoir une grande valeur de  $x$  qui garantisse néanmoins que  $|C_N(x)| \leq \varepsilon$ . Majorons ensuite les autres termes. Pour  $A(x)$ , c'est facile. Il existe un entier  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_1$ ,

$$|A(x)| = \left| S \left( 1 - \frac{1}{N} \right) - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction  $t \mapsto t^n$ , on a

$$|1 - x^n| \leq n(1 - x) \leq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n |a_n|.$$

D'après le théorème de Cesaro, puisque  $(na_n)$  tend vers 0, on sait que  $|B_N(x)|$  tend vers 0, et donc il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_2$ ,

$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout  $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$ , on trouve

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la série  $\sum_n a_n$  et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$ .

---

## Correction de l'exercice 22 ▲

1. Il suffit de remplacer  $t$  par  $2x^2$  dans le développement en série entière de  $\ln(1+t)$ . On a donc

$$\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}.$$

La série converge si  $|2x^2| < 1$ . Son rayon de convergence est donc  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2. Il suffit de factoriser par  $a$  au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de  $\frac{1}{1-u}$ . Il vient

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$

Pour  $|x/a| < 1 \iff |x| < |a|$ , on obtient

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est  $|a|$ .

3. On factorise par  $a$  :

$$\ln(x+a) = \ln(a(1+x/a)) = \ln(a) + \ln(1+x/a).$$

Pour  $|x/a| < 1$ , soit  $|x| < a$ , on en déduit

$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{na^n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière obtenue est  $a$ .

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour  $|x| < 1$ , on a

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

La série converge pour  $|x| < 1$  (règle du produit de Cauchy), et comme  $a_n \geq 1$ , le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour  $|x| > 1$ , la série  $\sum_n a_n x^n$  ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a  $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$  donc la fonction est définie sur  $I = ]-1/2, 1[$ , et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1+x-2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de  $\ln(1+u)$ , on obtient

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

(valable pour  $|x| < 1$ )

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n}$$

(valable pour  $|x| < 1/2$ ). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence  $1/2$ .

6. On factorise par 4 pour se ramener à  $(1+t)^\alpha$ . On a donc

$$(4+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction  $u \mapsto (1+u)^{-3/2}$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et

$$\forall u \in ] -1, 1[, (1+u)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} u^n.$$

Il en résulte que pour tout  $x$  tel que  $\frac{x^2}{4} \in ] -1, 1[$ , on a

$$\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence 2.

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

Notons  $f$  la fonction considérée. On pourrait écrire  $f(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$  et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus astucieux et beaucoup plus simple si on pense à écrire (attention aux exposants !)

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de  $(1+u)^\alpha$  avec  $u = -x^2$  et  $\alpha = -1/2$ , il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (x^{2n} + x^{2n+1}).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

---

### Correction de l'exercice 24 ▲

On décompose  $f$  en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par  $2x-1$  et qu'on fait  $x = 1/2$ , on trouve  $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$ . De même, multipliant par  $(x-2)^2$ , on trouve  $b = 1$ . Pour trouver  $a$ , on peut procéder par identification et on obtient  $a = 1$ . On développe en série entière chaque terme :

Pour  $x \neq 2$ ,

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x/2}.$$

Donc, pour  $|x|/2 < 1$ , on a

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

Le troisième terme se traite de la même façon. Pour  $|x| < 1/2$ , on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que  $\frac{1}{(x-2)^2}$  est la dérivée de  $\frac{-1}{x-2}$ . Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout  $x \in ]-1/2, 1/2[$ , on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence  $1/2$ .

### Correction de l'exercice 25 ▲

1. Posons  $u_n = \frac{n-1}{n!}$ . On vérifie facilement que la suite  $(u_{n+1}/u_n)$  tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à  $+\infty$ . Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x \cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons  $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ . Puisque  $u_n \rightarrow 1$ , la suite  $|u_n z^n|$  est bornée si  $|z| < 1$  et tend vers  $+\infty$  si  $|z| > 1$ . On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n &= \sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

Même si cette dernière fonction semble ne pas être définie en 0, elle se prolonge bien sûr par continuité en ce point.

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut  $+\infty$ . Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaître une fraction du type  $P(n)/n!$ , avec  $P$  un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base  $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \dots$ , dans le but de faire apparaître la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} x^n - 2e^x \\ &= x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n - 2e^x = (x^2 - 2)e^x. \end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut  $+\infty$ . Pour identifier la somme, que nous noterons  $S$ , il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle,

mais il faut l'évaluer en  $-x^2/2$  pour voir apparaître le  $(-1)^n x^{2n}$  au numérateur et le  $2^n$  au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour  $n = 1$ ), on obtient

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} = 1 - \exp(-x^2/2).$$

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Posons  $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$ . On a  $u_{n+1}/u_n \rightarrow x^2$ . Ainsi, si  $|x| < 1$ , la série est convergente et si  $|x| > 1$ , la série est divergente. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $S(x)$  la somme de la série entière. Alors  $S$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et

$$(xS)'(x) = \sum_{n \geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

Par intégration, on en déduit que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$xS(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

et donc, pour  $x \neq 0$ ,

$$S(x) = \frac{1}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

De plus,  $S(0) = 1$ .

2. Posons  $u_n = \frac{n^3}{n!}$ . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \rightarrow 0.$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à  $+\infty$ . Pour la sommer, on va exprimer  $n^3$  en fonction de  $n(n-1)(n-2)$ ,  $n(n-1)$  et  $n$  pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Utilisant que la dérivée de  $\exp(x)$  est égale à  $\exp(x)$ , on trouve

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^n = x^3 \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{n-3} = x^3 \exp(x).$$

De même, on a

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{n!} x^n = x^2 \exp(x) \text{ et } \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} x^n = x \exp(x).$$

On conclut que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x) \exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n.$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n nx^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} nx^{2n+1} = x \times \left( \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1/2}{2n - 1} - \frac{1/2}{2n + 1}.$$

Posons  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$  et  $g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n-1}$ . Alors, d'après la première question, on sait que pour  $x \neq 0$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

On se ramène à ce cas pour  $g$ , en remarquant que

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 + \sum_{n \geq 1} \frac{x^2 x^{2(n-1)}}{2(n-1) + 1} \\ &= -1 + x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -1 + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que, notant  $S$  la somme de la série initiale, pour  $x \neq 0$  dans l'intervalle  $] -1, 1[$ ,

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^2 - 1}{4x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Il est aussi clair que  $S(0) = -1$ .

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Il est d'abord clair que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $1 \leq S_n \leq n$ . Donc, pour  $\rho > 0$ , on a

$$\rho^n \leq S_n \rho^n \leq n \rho^n.$$

Ainsi, si  $\rho \in ]0, 1[$ , la suite  $(S_n \rho^n)$  est bornée (on peut même dire qu'elle tend vers 0), et si  $\rho > 1$ , la suite  $(S_n \rho^n)$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que le rayon de convergence de  $S$  vaut 1.

2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :

$$\begin{aligned} (1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x). \end{aligned}$$

3. Ayant reconnu le développement en série entière de  $-\ln(1-x)$ , on en déduit que

$$F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. On dérive deux fois  $f$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\alpha \arcsin t) \\ f'(t) &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t) \\ f''(t) &= \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t). \end{aligned}$$

On combine d'abord  $f$  et  $f''$  pour éliminer les termes en  $\cos(\alpha \arcsin t)$  puis on ajoute les termes en  $f'$  nécessaires pour éliminer les termes en  $\sin(\alpha \arcsin t)$ . Au final, on trouve que  $f$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière  $y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  sur  $] -R, R[$  vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .  $y'$  est somme de  $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}t^n$  et  $y''$  est somme de  $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$ . La fonction  $t \mapsto (1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y$  est donc somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n)t^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur  $] -R, R[$ . Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n.$$

Puisque  $a_0 = 1$  (car  $y(0) = 1$ ) et  $a_1 = y'(0) = 0$ , on en déduit que  $a_{2p+1} = 0$  pour tout  $p$  et que

$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - p + 1\right) \left(\frac{\alpha}{2} - p + 2\right) \dots \left(\frac{\alpha}{2} + p - 1\right).$$

Réciproquement, la série entière

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - p + 1\right) \left(\frac{\alpha}{2} - p + 2\right) \dots \left(\frac{\alpha}{2} + p - 1\right) x^{2p}$$

a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle  $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$  est une équation différentielle linéaire du second ordre, et  $1-t^2 \neq 0$  sur  $] -1, 1[$ . Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur  $] -1, 1[$  et vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .  $f$  et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit,  $f$  est développable en série entière, et

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - p + 1\right) \left(\frac{\alpha}{2} - p + 2\right) \dots \left(\frac{\alpha}{2} + p - 1\right) x^{2p}.$$

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. On dérive deux fois  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x). \end{aligned}$$

On trouve que  $f$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  sur  $] -R, R[$  vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = \lambda$ .  $y'$  est somme de  $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n$  et  $y''$  est somme de  $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$ . La fonction  $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$  est donc somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n)x^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur  $] -R, R[$ . Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + \lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

De plus,  $a_0 = 1$  (car  $y(0) = 1$ ) et  $a_1 = y'(0) = \lambda$ . On trouve ainsi une unique suite  $(a_n)$  solution. On peut calculer expliciter  $a_n$ , en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite  $(a_n)$  précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque  $a_{n+2}/a_n \rightarrow 1$ ). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle  $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$  est une équation différentielle linéaire du second ordre, et  $1-x^2 \neq 0$  sur  $] -1, 1[$ . Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur  $] -1, 1[$  et vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = \lambda$ .  $f$  et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit,  $f$  est développable en série entière, et  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. La fonction  $x \mapsto e^{x^2/2}$  est paire. La fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  est impaire (faire le changement de variables  $u = -t$  dans l'intégrale). Donc  $f$  est impaire.

2. La fonction  $x \mapsto e^{x^2}$  est développable en série entière, de rayon de convergence  $+\infty$ . Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ . Par produit,  $f$  est développable en série entière de rayon de convergence  $+\infty$ .

3. Par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x) = x e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt + 1 = x f(x) + 1.$$

$f$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' = xy + 1$ . Écrivons ensuite  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1}$  le développement en série entière de  $f$  (on sait qu'il a cette forme puisque  $f$  est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$

et  $a_0 = 1$ . On en déduit finalement que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de  $f$  en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de  $e^{x^2/2}$  et  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ . Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant  $x^{2n+1}$  qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

### Correction de l'exercice 31 ▲



1. Utilisant l'indication, on a

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{(2i)^{2n}} \int_0^\pi (e^{ix} - e^{-ix})^{2n} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n} \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} (e^{ix})^{2n-k} (e^{-ix})^k dx \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{(2n-2k)ix} dx. \end{aligned}$$

Or, cette dernière intégrale est nulle sauf si  $n = k$ , où elle vaut  $\pi$ . Il vient

$$I_{2n} = \frac{\pi \binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2. On sait, que pour tout  $u \in ]-1, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-u}} &= (1-u)^{-1/2} \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\frac{-1}{2} \times (\frac{-1}{2} - 1) \times \cdots \times (\frac{-1}{2} - n + 1)}{n!} u^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(-1) \times (-3) \times \cdots \times (-2n+1)}{2^n n!} u^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} u^n. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, appliquée à  $u = x^2 \sin^2 t \in ]-1, 1[$ , on a

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} \sin^{2n} t dt.$$

On va permuter la limite et l'intégrale. Pour cela, on remarque que la série est uniformément convergente pour  $t \in [0, \pi]$  (on travaille avec  $x$  fixé). En effet, on a  $|x \sin t| \leq |x| < 1$ , et on sait que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} |x|^{2n}$  est convergente puisque le développement en série entière de  $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$  a pour rayon de convergence 1. On peut donc inverser la limite et l'intégrale, et on trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} \int_0^\pi \sin^{2n} t dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{16^n} \binom{2n}{n}^2 x^{2n}. \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est bien développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

### Correction de l'exercice 32 ▲

1. La fonction  $t \mapsto t^{2k+1} e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et, au voisinage de  $+\infty$ , on a  $t^{2k+1} e^{-t^2} = o(t^{-2})$ . Ceci justifie la convergence de  $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt$ . De plus, en réalisant une intégration par parties (on intègre  $t e^{-t^2}$  et on dérive  $t^{2k}$ ), on a pour  $k \geq 1$

$$I_k = \left[ \frac{-1}{2} t^{2k} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{2k-1} e^{-t^2} dt = k I_{k-1}.$$

Comme de plus

$$I_0 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

on en déduit que  $I_k = \frac{k!}{2}$ .

2. Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence égal à  $+\infty$ , on sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a

$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1},$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt.$$

On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!} |x|^{2k+1}.$$

Or, posons  $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!} |x|^{2k+1}$ . On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \rightarrow 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série  $\sum_k u_k$  converge, il en est donc de même de la série  $\sum_k \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt$ . Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons  $g(x, t) = e^{-t^2} \sin(tx)$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . De plus, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t e^{-t^2} \cos(tx)$$

ce qui implique que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de  $x$ ) est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi,  $f$  est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

Pour former une équation différentielle vérifiée par  $f$ , on va intégrer par parties, en intégrant  $t e^{-t^2}$  et en dérivant  $\cos(tx)$ . Il vient

$$f'(x) = \left[ \frac{-1}{2} e^{-t^2} \cos(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} f(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $2y' + xy = 1$ . Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre; d'après le théorème de Cauchy,  $f$  est la solution de cette équation différentielle vérifiant  $y(0) = 0$ . Cherchons maintenant une solution  $y(x) = \sum_{k \geq 1} a_k x^k$  de cette équation différentielle vérifiant  $y(0) = 0$ . On a

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 1$$

soit

$$2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (2(k+2)a_{k+2} + a_k) x^{k+1} = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que  $a_1 = \frac{1}{2}$  puis que  $a_{k+2} = \frac{-a_k}{2(k+2)}$ . Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

3. Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence égal à  $+\infty$ , on sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a

$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1},$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt.$$

On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!} |x|^{2k+1}.$$

Or, posons  $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!} |x|^{2k+1}$ . On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \rightarrow 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série  $\sum_k u_k$  converge, il en est donc de même de la série  $\sum_k \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} \right| dt$ . Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

4. On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons  $g(x, t) = e^{-t^2} \sin(tx)$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . De plus, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t e^{-t^2} \cos(tx)$$

ce qui implique que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de  $x$ ) est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi,  $f$  est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

Pour former une équation différentielle vérifiée par  $f$ , on va intégrer par parties, en intégrant  $t e^{-t^2}$  et en dérivant  $\cos(tx)$ . Il vient

$$f'(x) = \left[ \frac{-1}{2} e^{-t^2} \cos(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} f(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $2y' + xy = 1$ . Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre; d'après le théorème de Cauchy,  $f$  est la solution de cette équation différentielle vérifiant  $y(0) = 0$ . Cherchons maintenant une solution  $y(x) = \sum_{k \geq 1} a_k x^k$  de cette équation différentielle vérifiant  $y(0) = 0$ . On a

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 1$$

soit

$$2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (2(k+2)a_{k+2} + a_k)x^{k+1} = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que  $a_1 = \frac{1}{2}$  puis que  $a_{k+2} = \frac{-a_k}{2(k+2)}$ . Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

---

### Correction de l'exercice 33 ▲

1. Posons pour  $n \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u_n(x) = e^{-n}e^{n^2ix}$ . Alors  $u_n$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $k \geq 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 0$ , on a

$$u_n^{(k)}(x) = (in^2)^k e^{-n}e^{n^2ix}.$$

Puisque  $n^{2k}e^{-n} = O(n^{-2})$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq Mn^{-2}.$$

La série (numérique) qui apparaît à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées  $k$ -ièmes  $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$  converge normalement (donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $k \geq 0$ . Ainsi,  $f = \sum_n u_n$  est de classe  $C^\infty$ .

2. D'après le calcul précédent, on a

$$|f^{(k)}(0)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} i^k n^{2k} e^{-n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n} \geq k^{2k} e^{-k}.$$

Or,  $k^k \geq k!$ , et donc

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq \frac{k^k}{k!} e^{-k} \geq k^k e^{-k}.$$

3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vidé  $I$  centré en 0 tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $f$  serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Mais pour  $x \neq 0$ , cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \geq k^k (x/e)^k \rightarrow +\infty$$

Ainsi,  $f$  n'est pas développable en série entière en 0.

---

### Correction de l'exercice 34 ▲

On va démontrer que  $u$  est développable en série entière en 0 sur l'intervalle  $] -1, 1[$ . Dans toute la suite, on va donc supposer  $|x| < 1$ . Méthode 1 : On sait, que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^k x^k}{n^{k+1}}.$$

Imaginons que l'on puisse permuter les deux sommes. Alors on obtient

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{k+1}} \right) x^k$$

ce qui prouve que  $u$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . Reste à justifier la permutation des deux séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille  $\left( \frac{(-1)^n (-1)^k x^k}{n^{k+1}} \right)_{n \geq 1, k \geq 0}$  est sommable. Malheureusement, ce n'est pas le cas, car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{n^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{n^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-x}$$

et cette dernière série est divergente. Il faut donc un peu ruser. En effet, la famille va devenir sommable si on exclut  $k = 0$  puisque

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{n^{k+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{n^k} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{|x|/n}{1 - \frac{|x|}{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2 - n|x|} \end{aligned}$$

et cette dernière série est convergente. En sortant le terme  $k = 0$  de la somme (c'est possible puisqu'il n'y a qu'un seul terme), on a donc justifié qu'on pouvait permuter les deux sommes.

Méthode 2 : On utilise que  $\frac{1}{x+n} = \int_0^1 t^{x+n-1} dx$ . On a donc :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1} dt.$$

On va permuter la série et l'intégrale. Pour cela, on pose

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n t^{x+n-1}.$$

Alors :

$f_N(t)$  converge simplement vers  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n t^{n-1} t^x = \frac{-t^x}{1+t} = f(t)$ .  $|f_N(t)| \leq t^x$  (car la valeur absolue de la somme partielle d'une série alternée est majorée par la valeur absolue du premier terme), la fonction  $t^x$  étant intégrable sur  $]0, 1[$  pour  $|x| < 1$ .

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$u(x) = - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

On développe ensuite  $t^x = \exp(x \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{(\ln t)^n}{n!}$ . On a donc :

$$u(x) = - \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{n! (1+t)} x^n \right) dt.$$

On permute, mais en sens contraire, l'intégrale et la série. Pour cela, on pose

$$g_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{(\ln t)^n}{n! (1+t)} x^n.$$

$g_N$  converge simplement vers  $\frac{t^x}{1+t}$ . On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |g_N(t)| &\leq \sum_{n=0}^N \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n! (1+t)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n! (1+t)} \\ &\leq \frac{1}{1+t} \exp(|x| |\ln t|) \\ &\leq \frac{1}{(1+t) t^{|x|}} \end{aligned}$$

et cette fonction est intégrable sur  $]0, 1[$  si  $|x| < 1$ .

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et permuter la série et l'intégrale :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( - \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n$$

expression valable pour  $|x| < 1$ .  $u$  est donc développable en série entière au voisinage de 0.

### Correction de l'exercice 35 ▲

Prenons  $x \in [-a, a]$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  entre 0 et  $x$ , on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \leq C |xA|^{n+1}.$$

Soit  $r = \min(a, 1/A)$ . Alors si  $|x| < r$ , on a  $|xA| < 1$  et donc  $|xA|^{n+1} \rightarrow 0$ . On en déduit que la série de Taylor de  $f$  converge vers  $f$  sur l'intervalle  $] -r, r[$ , et donc  $f$  est développable en série entière sur cet intervalle.

### Correction de l'exercice 36 ▲

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.

2. On sait que  $f^{(n+1)}$  est croissante sur  $I$  puisque  $f^{(n+2)} \geq 0$ . On en déduit que, pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$ . Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.

3. Il s'agit de démontrer que  $R_n(x)$  tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite  $(R_n(\alpha))$  est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour  $x = \alpha$ , et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que  $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$ . Et donc  $(R_n(x))$  tend bien vers 0.

### Correction de l'exercice 37 ▲

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = 1$$

avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . La suite  $(b_n)$  vérifie donc la relation de récurrence

$$\begin{cases} b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_n &= -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \end{cases}$$

2. Puisque  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a un rayon de convergence strictement positif, il existe  $\rho > 0$  et  $A > 0$  tel que  $|a_n| \leq A \rho^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Il suffit alors de choisir  $R = \max(A\rho, \rho)$ . On sait que, si  $C > R$ ,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{R^k}{C^k} = \frac{\frac{R}{C}}{1 - \frac{R}{C}}.$$

Si  $C$  tend vers  $+\infty$ , ceci tend vers 0. On va prouver par récurrence sur  $n$  que  $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$ . C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang  $n-1$ , alors

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n \frac{R^k}{C^k} \frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

La série entière  $\sum_n b_n z^n$  est donc de rayon de convergence non nul.

3. Puisque  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a un rayon de convergence strictement positif, il existe  $\rho > 0$  et  $A > 0$  tel que  $|a_n| \leq A \rho^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Il suffit alors de choisir  $R = \max(A\rho, \rho)$ .

4. On sait que, si  $C > R$ ,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{R^k}{C^k} = \frac{\frac{R}{C}}{1 - \frac{R}{C}}.$$

Si  $C$  tend vers  $+\infty$ , ceci tend vers 0.

5. On va prouver par récurrence sur  $n$  que  $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$ . C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang  $n-1$ , alors

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n \frac{R^k}{C^k} \frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

6. La série entière  $\sum_n b_n z^n$  est donc de rayon de convergence non nul.

7. Soit  $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ . Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de  $(b_n)$ , on a  $f(z)g(z) = 1$  dans un voisinage de 0. Autrement dit,  $g = 1/f$  dans un voisinage de 0.  $1/f$  est donc développable en série entière en 0.

### Correction de l'exercice 38 ▲

1. Pour  $x \neq 0$ , on a, d'après le développement en série entière de sin,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 1. Ainsi,  $f$  coïncide sur  $\mathbb{R}$  avec une série entière de rayon de convergence  $+\infty$ .  $f$  est donc de classe  $C^\infty$ .

2. Pour  $x \geq 0$ , on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Pour  $x < 0$ , on a :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Ainsi,  $g$  coïncide sur  $\mathbb{R}$  avec la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$  : elle est donc de classe  $C^\infty$ .

3. Pour  $x \neq 0$ , on a

$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, et on met en facteur le premier terme du numérateur et du dénominateur. On trouve

$$h(x) = \frac{x^2 \times \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$

Posant  $u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$  et  $v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$ , on voit que pour  $x \neq 0$ ,  $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ . Or,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^\infty$  (ce sont des sommes de série entière),  $v$  ne s'annule pas en 0, et de plus  $u(0)/v(0) = 0 = h(0)$ . Ainsi,  $h$  définit bien une fonction de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions de classe  $C^\infty$  dont le dénominateur ne s'annule pas en 0. Comme  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ , on en déduit bien que  $h$  est  $C^\infty$  sur  $] -\pi, \pi[$ .

### Correction de l'exercice 39 ▲

Développons les deux fonctions en série entière. On a

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ et } e^{x^2/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Puisque  $x^{2k} \geq 0$ , le résultat sera démontré si on prouve que, pour tout  $k \geq 0$ , on a  $(2k)! \geq 2^k k!$ . C'est vrai pour  $k = 0$ , et pour  $k \geq 1$ , on écrit simplement :

$$\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2k \times (2k-1) \times \cdots \times (k+1)}{2 \times 2 \times \cdots \times 2}.$$

Comme  $k+1 \geq 2$ ,  $k+2 \geq 2 \dots$ , on obtient bien le résultat voulu.

---

**Correction de l'exercice 40 ▲**

---

1. Posons  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$ . Alors  $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} \rightarrow |x|^2$ . Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour  $|x| < 1$  et divergente pour  $|x| > 1$ . Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour  $x = 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$  est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour  $x = -1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$  est convergente.  $f$  est donc définie sur  $[-1, 1]$ .

2. La théorie des séries entières nous dit que  $f$  est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur  $] -1, 1[$ . Pour prouver la continuité sur  $[-1, 1]$ , on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle  $[-1, 1]$ . En effet, pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$$

et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de  $x$ ). La série est donc normalement convergente sur  $[-1, 1]$ . Comme chaque fonction  $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$  est continue sur  $[-1, 1]$ , on en déduit que  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$ .

3. La série dérivée est, pour  $|x| < 1$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1+x^2).$$

En effet, pour  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $0 \leq x^2 < 1$  et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de  $\ln(1+u)$ . Puisque  $f(0) = 0$ , on en déduit  $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$ . On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1+t^2)dt \\ &= [t \ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2[t - \arctan(t)]_0^x \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x. \end{aligned}$$

4. L'égalité  $f(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x$  n'est valable que pour  $x \in ] -1, 1[$ . Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur  $[0, 1]$  tout entier. On conclut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

---

**Correction de l'exercice 41 ▲**

---

1. Il est facile de vérifier que  $1 + j + j^2 = 0$ , que  $1 + j^2 + j^4 = 0$  et que  $j^3 = 1$ . On en déduit que

$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^r + j^{2r}$$

où  $r$  est le reste de  $k$  modulo 3. On en déduit que  $1 + j^k + j^{2k} = 0$  sauf si  $k$  est multiple de 3. Dans ce cas, la somme vaut 3. Il vient alors

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{k \geq 0} \frac{1 + j^k + j^{2k}}{k!} x^k = 3 \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$



Écrivant

$$e^{jx} = \exp((-1 + i\sqrt{3})x/2) = e^{-x/2}(\cos(x\sqrt{3}/2) + i\sin(x\sqrt{3}/2))$$

et

$$e^{j^2x} = \exp((-1 - i\sqrt{3})x/2) = e^{-x/2}(\cos(x\sqrt{3}/2) - i\sin(x\sqrt{3}/2))$$

on en déduit

$$S(x) = \frac{e^x + 2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}.$$

La somme recherchée est donc

$$S(1) = \frac{e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2)}{3}.$$

2. Il est facile de vérifier que  $1 + j + j^2 = 0$ , que  $1 + j^2 + j^4 = 0$  et que  $j^3 = 1$ . On en déduit que

$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^r + j^{2r}$$

où  $r$  est le reste de  $k$  modulo 3. On en déduit que  $1 + j^k + j^{2k} = 0$  sauf si  $k$  est multiple de 3. Dans ce cas, la somme vaut 3. Il vient alors

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{k \geq 0} \frac{1 + j^k + j^{2k}}{k!} x^k = 3 \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

3. Écrivant

$$e^{jx} = \exp((-1 + i\sqrt{3})x/2) = e^{-x/2}(\cos(x\sqrt{3}/2) + i\sin(x\sqrt{3}/2))$$

et

$$e^{j^2x} = \exp((-1 - i\sqrt{3})x/2) = e^{-x/2}(\cos(x\sqrt{3}/2) - i\sin(x\sqrt{3}/2))$$

on en déduit

$$S(x) = \frac{e^x + 2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}.$$

La somme recherchée est donc

$$S(1) = \frac{e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2)}{3}.$$

4. On a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \\ S''(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \\ S^{(3)}(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = S(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $S$  est solution de l'équation  $y^{(3)} - y = 0$ . L'équation précédente est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est  $r^3 - 1 = 0$ , qui admet pour racines  $1, j, j^2$ . Toute solution s'écrit donc  $y(x) = ae^x + be^{jx} + ce^{j^2x}$ .  $S$  est la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant  $S(0) = 1$ ,  $S'(0) = S''(0) = 0$ . On obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ a + bj + cj^2 &= 0 \\ a + bj^2 + cj &= 0 \end{cases}$$

d'où on tire  $a = b = c = 1/3$ . On a donc

$$S(x) = \frac{1}{3} \left( e^x + e^{jx} + e^{j^2x} \right) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

5. On a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \\ S''(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \\ S^{(3)}(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = S(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $S$  est solution de l'équation  $y^{(3)} - y = 0$ .

6. L'équation précédente est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est  $r^3 - 1 = 0$ , qui admet pour racines  $1, j, j^2$ . Toute solution s'écrit donc  $y(x) = ae^x + be^{jx} + ce^{j^2x}$ .

7.  $S$  est la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant  $S(0) = 1, S'(0) = S''(0) = 0$ . On obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ a + bj + cj^2 &= 0 \\ a + bj^2 + cj &= 0 \end{cases}$$

d'où on tire  $a = b = c = 1/3$ . On a donc

$$S(x) = \frac{1}{3} (e^x + e^{jx} + e^{j^2x}) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

### Correction de l'exercice 42 ▲

1. La fonction  $x \mapsto x^n \ln(x)$  est continue sur  $]0, 1]$ . En 0, on a  $x^n \ln(x) = o(1/\sqrt{x})$  qui est intégrable au voisinage de 0. Donc  $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$  est convergente. Pour calculer cette intégrale, on réalise une intégration par parties :

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{-1}{(n+1)^2}.$$

2. Remarquons d'abord que l'intégrale est bien définie. En effet, la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et en 1. Par exemple, en 0,  $\ln(x) \ln(1-x) \sim_0 -x \ln(x)$  et cette dernière fonction tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. D'autre part, on a

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n} \ln(x) dx.$$

On va permuter la série et l'intégrale en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 \left| -\frac{x^n}{n} \ln(x) \right| dx = \frac{1}{n(n+1)^2},$$

et le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une série convergente. Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 -\frac{x^n}{n} \ln(x) dx.$$

Tenant compte du calcul effectué à la première question, on trouve bien le résultat voulu.

### Correction de l'exercice 43 ▲

1. On introduit la série entière  $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ . Supposons que son rayon de convergence soit  $r > 0$ . Alors, faisant le produit de Cauchy des deux séries, on a, pour tout  $x \in ]-r, r[$ ,

$$f^2(x) = \sum_{n \geq 0} v_n x^n \text{ avec } v_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = u_{n+1}.$$

Autrement dit, on a pour  $x \neq 0$ ,

$$f^2(x) = \sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^n = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Pour chaque  $x \in ]-r, r[$ ,  $f(x)$  vérifie donc l'équation

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = 0,$$

l'égalité restant vraie en  $x = 0$  par passage à la limite.

2. Il en résulte que, pour chaque  $x \in ]-r, r[ \setminus \{0\}$ , on doit avoir

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Or,  $f$  doit être continue en 0 avec  $f(0) = 1$ . S'il existe une suite  $(x_n)$  tendant vers 0 pour laquelle  $f(x_n) = \frac{1 + \sqrt{1-4x_n}}{2x_n}$ , alors  $|f(x_n)| \rightarrow +\infty$ , ce qui est contradictoire. Donc il existe  $\rho > 0$  tel que

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour tout } x \in ]-\rho, \rho[ \setminus \{0\}.$$

3. Réciproquement, soit  $f$  définie sur  $] -\infty, 1/4[$  par  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ . On va prouver que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0. En effet, pour tout  $x \in ]-1/4, 1/4[$ , on a

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} x^n.$$

On en déduit que, pour tout  $x \in ]-1/4, 1/4[$ , on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n.$$

Puisque  $f$  vérifie  $x f^2(x) - f(x) + 1 = 0$ , le calcul effectué à la première question (ie le développement en série entière de  $x f^2 - f + 1$ ) prouve que, en posant  $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ ,  $a_0 = 1$  et  $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ . Ainsi,  $(u_n)$  et  $(a_n)$  vérifient la même relation de récurrence. On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_n = a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

### Correction de l'exercice 44 ▲

1. Puisque  $\{1, 2, 3\}$  a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de  $\{1, 2, 3\}$  dans lui-même : l'identité ; les 3 transpositions  $(1\ 2)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(2\ 3)$ . les 2 cycles  $(1\ 2\ 3)$  et  $(1\ 3\ 2)$ .

L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que

$$D_{3,0} = 2, D_{3,1} = 3, D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$

2. l'identité ;

3. les 3 transpositions  $(1\ 2)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(2\ 3)$ .

4. les 2 cycles  $(1\ 2\ 3)$  et  $(1\ 3\ 2)$ .

5. Si on note  $A_k$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k$  point fixes, alors les ensembles  $A_0, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints et leur réunion est égale à l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Ainsi, on a bien  $n! = \sum_{k=0}^n \text{card}(A_k) = \sum_{k=0}^n D_{n,k}$ .

6. Pour chaque permutation ayant  $k$  points fixes, il y a

$\binom{n}{k}$  choix possibles de ces  $k$  points fixes (choisir  $k$  éléments parmi  $n$ ) ; ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les  $n - k$  éléments restants. Il y a  $D_{n-k,0}$  telles permutations.

Le nombre de permutations ayant  $k$  points fixes vaut donc  $\binom{n}{k} D_{n-k,0}$ .

7.  $\binom{n}{k}$  choix possibles de ces  $k$  points fixes (choisir  $k$  éléments parmi  $n$ );

8. ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les  $n - k$  éléments restants. Il y a  $D_{n-k,0}$  telles permutations.

9. Clairement, on a  $0 \leq d_n \leq n!$ , soit  $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$ . La série converge absolument si  $|z| < 1$ , son rayon de convergence est au moins égal à 1.

10. Puisque les séries entières définissant  $\exp x$  et  $f(x)$  ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour  $|x| < 1$ . De plus, on a

$$(\exp x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n D_{n,k} = 1.$$

On obtient

$$(\exp x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

11. De l'égalité  $(\exp x)f(x) = \frac{1}{1-x}$ , on tire

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient bien  $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

12. La probabilité recherchée est  $p_n = d_n/n! = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . Utilisant le développement en série entière de  $\exp(-x)$ , on trouve que cette probabilité converge vers  $\exp(-1) = 1/e$ .

---

### Correction de l'exercice 45 ▲

1. Considérons  $s$  une involution de  $\{1, \dots, n+1\}$ . Ou bien elle fixe  $n+1$ . Dans ce cas, sa restriction à  $\{1, \dots, n\}$  est une involution de cet ensemble, et il y a  $I_n$  telles involutions. Ou bien elle envoie  $n+1$  sur un entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Dans ce cas,  $s(k) = n+1$  et  $s$  agit comme une involution sur l'ensemble des  $n-1$  entiers restants. Il y a  $n$  choix pour l'entier  $k$  et  $I_{n-1}$  choix pour l'involution résultante. On en déduit que

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

2. Une involution est nécessairement bijective. Donc  $I_n \leq n!$  ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à  $S$  est supérieur ou égal à 1.

3. On a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n \geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n.$$

En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x).$$

4. La résolution de l'équation différentielle donne, compte tenu de la condition initiale  $S(0) = 1$ ,

$$S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^p \frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!} \text{ et } I_{2p+1} = \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$

### Correction de l'exercice 46 ▲

1. Soit  $r > 0$  le rayon de convergence de  $f$ . On a, pour tout  $x \in ]-r, r[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ x f'(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on a

$$f''(x) + x f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n.$$

Or,  $f'' + x f' + f = 1$ . Par unicité du développement en série entière, on obtient  $b_0 = 1$  et  $b_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Ceci nous donne les relations

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0) \text{ et } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \text{ pour } n \geq 1.$$

2. On sait en outre que  $a_0 = y(0) = 0$  et que  $a_1 = y'(0) = 0$ . On en déduit que tous les termes impairs  $a_{2n+1}$  sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{-1}{2n}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{4}\right) a_2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}. \end{aligned}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$$

valable pour  $n \geq 1$ . Réciproquement, posons

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}.$$

La série entière qui apparaît est de rayon de convergence égal à  $+\infty$ , la fonction  $f$  ainsi définie est donc de classe  $C^\infty$  et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

3. De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - \exp(-x^2/2).$$

### Correction de l'exercice 47 ▲

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  pour que ceci définisse une solution de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . La continuité de  $y$  en 0 entraîne que  $a = c$  puisque

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x).$$

De plus, on a

$$y'(x) = -2ax \sin(x^2) + 2bx \cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2b \cos(x^2) - 4bx^2 \sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

De même, on a

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2d \cos(x^2) - 4dx^2 \sin(x^2) \text{ si } x < 0.$$

Remarquons que

$$2b = \lim_{x \rightarrow 0^+} y''(x) \text{ et } 2d = \lim_{x \rightarrow 0^-} y''(x).$$

Pour que  $y''$  soit continue en 0, il est nécessaire que  $b = d$ . Réciproquement la fonction  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$  définit bien une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière solution de  $(E)$  de rayon de convergence  $R > 0$ . On introduit ce développement en série entière dans  $(E)$ . Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :

$$xy'' - y' + 4x^3 y = -a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3})x^n = 0$$

pour tout  $x \in ]-R, R[$ . L'unicité du développement en série entière entraîne que  $a_1 = a_3 = 0$ , tandis que, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n-1)(n+1)} a_{n-3}.$$

En réindexant, on trouve, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+4} = -\frac{4}{(n+2)(n+4)} a_n.$$

3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque  $a_1$  et  $a_3$  sont nuls, on trouve que  $a_{4p+1} = 0$  et  $a_{4p+3} = 0$  pour tout  $p \geq 0$ .

4. La relation de récurrence nous dit que

$$a_{4p} = -\frac{4}{(4p)(4p-2)} a_{4(p-1)} = \frac{-1}{2p(2p-1)}.$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0.$$

De même, on obtient

$$a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que  $\frac{R^p}{(2p)!}$  tend vers 0 lorsque  $p$  tend vers l'infini, pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{4p} + a_2 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+2} \\ &= a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2). \end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ , sa somme est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est un espace

vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par  $\cos(x^2)$  et  $\sin(x^2)$ . Considérons maintenant une solution  $y$  de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle est solution sur  $]0, +\infty[$ , et donc il existe deux constantes  $a_0$  et  $a_2$  telles que

$$y(x) = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) \text{ pour } x > 0.$$

Elle est solution sur  $] -\infty, 0[$  et donc il existe deux constantes  $b_0$  et  $b_2$  telles que

$$y(x) = b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) \text{ pour } x < 0.$$

D'après la question préliminaire,  $y$  va se prolonger en une fonction de classe  $C^2$  si et seulement si  $a_0 = b_0$  et  $a_2 = b_2$ . Ainsi, l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

---